

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

(von Michael Didas, Wintersemester 2001/2002)

- §1. Existenz- und Eindeutigkeit von Lösungen
- §2. Trennung der Variablen
- §3. Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung
- §4. Systeme mit konstanten Koeffizienten
- §5. Lineare Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung

## §1. Existenz- und Eindeutigkeit von Lösungen

Ist  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und erfüllt eine lokale Lipschitz-Bedingung in  $y$ , so ist das AWP zur Differentialgleichung  $y' = f(t, y)$  lokal eindeutig lösbar. Falls  $f$  von der Klasse  $C^k$  in  $t$  (und  $y$ ) ist, so ist die lokale Lösung ebenfalls eine  $C^k$ -Funktion (und ihre Abhängigkeit von den Anfangswerten ist  $C^k$ ).

**Satz.** Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen (Phasenraum),  $V \subset \mathbb{R}^k$  offen (Parameterraum),  $f : I \times U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig mit

$$|f(t, y_1, \kappa) - f(t, y_2, \kappa)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (t \in I, \kappa \in V \text{ und } y_1, y_2 \in U)$$

(Lipschitz-Bedingung in  $y$ ). Dann gilt:

### (1) Existenz- und Eindeutigkeit.

Ist  $(t_0, y_0, \kappa_0) \in I \times U \times V$ , so existiert eine Umgebung der Form  $(t_0, y_0, \kappa_0) \in I_0 \times U_0 \times V_0 \subset I \times U \times V$  ( $I_0$  Intervall) sowie eine stetige Funktion

$$y : I_0 \times U_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

so dass  $y(\cdot, \eta, \kappa) : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist:

$$y' = f(t, y, \kappa) \quad (t \in I_0), \quad y(t_0) = \eta.$$

### (2) Abhängigkeit von Anfangswerten und Parameter.

Ist  $f : I \times U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, y, \kappa) \mapsto f(t, y, \kappa)$ , eine  $C^k$ -Funktion in

$$\left. \begin{array}{l} y \\ (y, \kappa) \\ (t, y, \kappa) \end{array} \right\} \text{ so ist } (t, \eta, \kappa) \mapsto y(t, \eta, \kappa) \in \mathbb{R}^n \text{ Klasse } C^k \text{ in } \left\{ \begin{array}{l} \eta \\ (\eta, y) \\ (t, \eta, \kappa) \end{array} \right. .$$

## Beweisideen.

### (1) Vereinfacht: $x_0 \in I$ , $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ global Lipschitz in $y$ .

$$\left. \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ y(t) - y_0 = \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx \right\} \Leftrightarrow Ty = y$$

mit  $T : C(I_0, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I_0, \mathbb{R}^n)$ ,  $Ty(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx$ . Wähle  $I_0$  so klein, dass  $|I_0| \cdot L < 1$ . Wegen

$$|Ty_1(t) - Ty_2(t)| \leq \int_{t_0}^t L|y_1(x) - y_2(x)| dx \leq |I_0| \cdot L \cdot \|y_1 - y_2\|_\infty$$

ist dann  $T$  kontrahierend. Banachscher Fixpunktsatz liefert Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung  $y = Ty$ .

### (2) Aus $\frac{\partial}{\partial t} y(t, \eta, \kappa) = f(t, y, \kappa)$ folgt z.B. für $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ die Gültigkeit der Variationsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y, \kappa) \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = id.$$

Leite daraus Regularität ab. □

## §2. Trennung der Variablen

**Satz.** Seien  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen auf offenen Intervallen  $I, U \subset \mathbb{R}$ . Seien  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in U$  feste Punkte mit  $g(y_0) \neq 0$ . Dann existiert ein offenes Intervall  $I_0 \subset I$  um  $t_0$ , auf dem das Anfangswertproblem

$$y' = f(t)g(y), \quad y(t_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Diese ergibt sich auf  $I_0$  durch Auflösen der Gleichung

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(\eta)} d\eta = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

nach  $y(t)$ .

**Beweis.** Angenommen  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  löst das gegebene Anfangswertproblem. Dann gilt notwendigerweise  $y(t) \in U$  und  $g(y(t)) \neq 0$  auf einer Umgebung  $I_0$  von  $t_0$ . Folglich

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(\eta)} d\eta = \int_{t_0}^t \frac{y'(\tau)}{g(y(\tau))} d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \quad \Leftrightarrow \quad H(t, y(t)) = 0$$

mit

$$H : I_0 \times U \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(t, y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(\eta)} d\eta - \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau.$$

Offenbar ist  $H$  eine  $C^1$ -Funktion mit  $H(t_0, y_0) = 0$  und  $\frac{\partial H}{\partial y}(y_0) = 1/g(y_0) \neq 0$ . Nach Verkleinerung von  $I_0$  und  $U$  (zu  $I_0$  bzw.  $U_0$ ) existiert daher nach dem Satz über implizite Funktionen eine  $C^1$ -Funktion

$$y : I_0 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ so dass} \quad H(t, y) = 0 \quad ((t, y) \in I_0 \times U_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = y(t).$$

Hieraus folgt bereits die behauptete Eindeutigkeit; um den Existenzbeweis abzuschließen, bleibt zu zeigen, dass die oben konstruierte Funktion  $y : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$  das gegebene Anfangswertproblem löst. Differenzieren der Identität  $H(t, y(t)) = 0$  nach  $t$  liefert  $-f(t) + \frac{1}{g(y(t))}y'(t) = 0$  oder äquivalent  $y'(t) = f(t)g(y(t))$  auf  $I_0$ .  $\square$

Der Satz bzw. der Beweis zeigt, dass zur Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(t)g(y)$$

folgende Strategie meist zum Erfolg (d.h. zur allgemeinen Lösung) führt: Dividiere durch  $g(y)$ , bilde auf beiden Seiten Stammfunktionen

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

und versuche, nach  $y$  aufzulösen. Da dies jedoch keinem rigorosen Beweis entspricht (warum?), prüfe anschließend, ob die so erhaltene Funktion  $y$  tatsächlich Lösung ist. Ferner beachte: Ist  $g(\hat{y}) = 0$  für ein  $\hat{y} \in \mathbb{R}$ , so ist die konstante Funktion  $y \equiv \hat{y}$  eine Lösung.

### §3. Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

#### (1) Existenz von Lösungen, Struktur der Lösungsmenge.

Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  stetig,  $g : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  stetig.

- (a) Die Menge aller Lösungen  $y$  der homogenen Gleichung  $y' = A(t)y$  bildet einen  $n$ -dimensionalen Unterraum  $L_{\text{hom}} \subset C^1(I, \mathbb{C}^n)$ . Ist  $t_0 \in I$ , so ist  $L_{\text{hom}} \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $y \mapsto y(t_0)$  ein Isomorphismus von Vektorräumen (d.h. AWP eindeutig lösbar und Lösung existiert auf ganz  $I$ ). Eine Basis  $y_1, \dots, y_n$  von  $L_{\text{hom}}$  nennt man Fundamentalsystem.
- (b) Die Menge aller Lösungen  $y$  einer zugehörigen inhomogenen Gleichung  $y' = A(t)y + g(t)$  bildet einen affinen  $n$ -dimensionalen Unterraum  $L_{\text{inh}} = y_s + L_{\text{hom}} \subset C^1(I, \mathbb{C}^n)$ , wobei  $y_s$  irgendeine ("spezielle") Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Eine solche erhält man etwa durch Variation der Konstanten.

#### (2) Variation der Konstanten.

Sei  $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$  ein Fundamentalsystem der hom. Gleichung  $y' = Ay$ . Dann ist  $y_h(t) = Y(t)c$  ( $c \in \mathbb{C}^n$ ) die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung suche mit dem Ansatz

$$y_s(t) = Y(t)c(t) \quad (c \in C^1(I, \mathbb{C}^n)).$$

Wegen  $y'_s = Y'c + Yc'$  und da  $Y'c = AYc$  gilt, ist

$$y'_s = Ay_s + g \quad \Leftrightarrow \quad Y'c + Yc' = AYc + g \quad \Leftrightarrow \quad Yc' = g.$$

Da  $Y(t) \in M_n(\mathbb{C})$  invertierbar ist (Fundamentalsystem), ist dies äquivalent zu

$$c'(t) = (Y(t))^{-1}g(t) \quad (t \in I),$$

woraus man  $c$  durch Integration erhält.

#### (3) Reduktion der Ordnung (d'Alembert).

Sind  $y_1, \dots, y_k$  ( $k < n$ ) lin. unabh. Lösungen von  $y' = A(t)y$ , so o.E. nach Ummumerierung  $Y_0 = (y_1, \dots, y_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$  lokal um einen Punkt regulär. Transformiere:  $z = Y_0^{-1}y$ . Dann

$$z' = -Y_0^{-1}Y_0'Y_0^{-1}y + Y_0^{-1}y' = Y_0^{-1}(-Y_0' + AY_0)z.$$

Die ersten  $k$ -Spalten von  $Y_0'$  und  $AY_0$  sind identisch (nach Konstruktion). Die ersten  $k$  Spalten der Matrix  $B = Y_0^{-1}(-Y_0' + AY_0)$  sind Null. Zerlege daher  $z = (z_1, z_2) \in C^1(I, \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k})$ . Dann bleibt zu lösen:

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

mit  $B_2 \in C(I, M_{n-k}(\mathbb{C}))$ .

## §4. Systeme mit konstanten Koeffizienten

Gegeben:  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Löse  $y' = Ay$ . Klar: Lösungsraum ist  $n$ -dimensionaler Unterraum von  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ .

### (1) Matrix-Exponentialfunktion.

Für  $A \in M_n(\mathbb{C})$  beliebig konvergiert die Reihe

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = e^{At} \quad (t \in \mathbb{R})$$

absolut und lokal gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ . Formales Differenzieren liefert  $Y' = \sum_{k \geq 1} k \frac{A^k t^{k-1}}{k!} = A \sum_{k \geq 0} \frac{A^k t^k}{k!} = Ae^{At}$ . Damit löst  $Y$  die Matrix-Differentialgleichung  $Y' = AY$ , und

$$y(t) = e^{At} \cdot c \quad (c \in \mathbb{C}^n) \quad [\text{beachte: } y(0) = c]$$

ist allgemeine Lösung von  $y' = Ay$  bzw.  $(e^{At}e_1, \dots, e^{At}e_n)$  ist Fundamentalsystem (lineare Unabhängigkeit bei  $t = 0$  testen).

### (2) Fundamentalsystem aus Jordanbasis.

Ist  $(v_0, \dots, v_k)$  eine Jordankette von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ , d.h. lin. unabh. System mit  $(A - \lambda)v_0 = 0$  und  $(A - \lambda)v_j = v_{j-1}$  ( $j = 1, \dots, k$ ), so sind

$$y_m(t) = \sum_{j=0}^m v_j t^{m-j} e^{\lambda t} \quad (m = 0, \dots, k)$$

$k + 1$  verschiedene Lösungen von  $y' = Ay$  (Nachweis durch Einsetzen), die linear unabhängig sind ( $y_m(0) = v_m$ ).

Satz über Jordansche Normalform:  $\mathbb{C}^n$  hat eine Basis

$$((v_0^1, \dots, v_{k_1}^1), \dots, (v_0^l, \dots, v_{k_l}^l))$$

bestehend aus Jordanketten von  $A$ . Bilde nach obiger Formel die zugehörigen Fundamentallösungen

$$(y_m^1)_{m=1, \dots, k_1}, \dots, (y_m^l)_{m=1, \dots, k_l}.$$

Diese sind linear unabhängig (Auswerten in  $t = 0$  liefert Jordanbasis), bilden also ein Fundamentalsystem.

### (3) Reelles Fundamentalsystem. Im Fall $A \in M_n(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ Eigenwert von } A &\Rightarrow \bar{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ Eigenwert von } A \\ (v_0, \dots, v_k) \text{ Jordankette zu } \lambda &\Rightarrow (\bar{v}_0, \dots, \bar{v}_k) \text{ Jordankette zu } \bar{\lambda} \\ y_m \text{ Fundamentallösung zu } \lambda &\Rightarrow \bar{y}_m \text{ Fundamentallösung zu } \bar{\lambda} \end{aligned}$$

Lösungssystem  $(y_m, \bar{y}_m)$  kann (ohne komplexen Spann zu ändern) ersetzt werden durch  $(\operatorname{Re} y_m = \frac{1}{2}(y_m + \bar{y}_m), \operatorname{Im} y_m = \frac{1}{2i}(y_m - \bar{y}_m))$ . Beachte:

$$\operatorname{Re} y_m(t) = \sum_{j=0}^m v_j t^{m-j} e^{\operatorname{Re} \lambda t} \cos(\operatorname{Im} \lambda t), \quad \operatorname{Im} y_m(t) = \sum_{j=0}^m v_j t^{m-j} e^{\operatorname{Re} \lambda t} \sin(\operatorname{Im} \lambda t).$$

## §5. Lineare Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung

### (1) Existenz von Lösungen, Struktur der Lösungsmenge.

Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $b, a_\nu : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  stetig ( $\nu = 0, \dots, n-1$ ).

- (a) Die Lösungen der homogenen Gleichung  $y^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(t)y^{(\nu)}$  bilden einen  $n$ -dimensionalen Unterraum  $L_{\text{hom}} \subset C^n(I, \mathbb{C})$ . Für beliebiges  $t_0 \in I$  ist die Abbildung  $L_{\text{hom}} \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $y \mapsto (y(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0))$  ein Vektorraumisomorphismus. Eine Basis von  $L_{\text{hom}}$  nennt man Fundamentalsystem.
- (b) Die Lösungen der inhomogenen Gleichung  $y^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(t)y^{(\nu)} + b(t)$  bilden einen  $n$ -dimensionalen affinen Unterraum  $L_{\text{inh}} = y_s + L_{\text{hom}} \subset C^n(I, \mathbb{C})$ , wobei  $y_s$  eine beliebige ("spezielle") Lösung der inhomogenen Gleichung bezeichnet. Diese kann z.B. über Variation der Konstanten gewonnen werden.

### (2) Variation der Konstanten.

Ist  $(y_1, \dots, y_n)$  ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung, so ist  $y(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t)$  mit  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Suche eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung mit dem Ansatz

$$y_s(t) = \sum_{i=1}^k c_i(t) y_i(t), \quad \text{wobei } c_i \in C^k(I, \mathbb{C}) \text{ den Forderungen}$$

$$\sum_{i=1}^k c'_i(t) y_i^{(j)}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_s^{(j)} = \sum_{i=1}^k c_i(t) y_i^{(j)}(t) \quad (j = 0, \dots, n-2)$$

genügen sollen. Einsetzen liefert

$$y_s^{(n)} = \sum_{i=1}^n \underline{c'_i y_i^{(n-1)}} + \sum_{i=1}^n \underline{c_i y_i^{(n)}} = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu y_i^{(\nu)} + b(t)$$

(unterstrichene Ausdrücke sind gleich). Zusammen mit obigen Forderungen ergibt sich für  $c(t)$  das System

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y'_1 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Dieses ist immer lösbar, da Matrix für alle  $t$  regulär (Wronskideterminante).

### (3) Reduktion nach d'Alembert. Ist $y \neq 0$ eine Lösung der homogenen Gleichung $y^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(t)y^{(\nu)}$ , so suche eine weitere Lösung in der Form

$$u(t) = y(t) \cdot w(t)$$

Einsetzen führt auf lineare Differentialgleichung  $(n-1)$ -ter Ordnung für  $w'$ :  $\sum_{j=1}^n \left( \sum_{\nu=j}^n \binom{n}{j} a_\nu(t) v^{(\nu-j)}(t) \right) w^{(j)}(t) = 0$ . Ist  $(w'_1, \dots, w'_{n-1})$  Fundamentalsystem hiervon, so ist ein Fundamentalsystem der ursprünglichen Gleichung gegeben durch  $(y, y \cdot w_1, \dots, y \cdot w_{n-1})$ . Zum Beweis der lin. Unabhängigkeit beachte  $0 = (c_0 y + c_1 y w_1 + \dots + c_{n-1} y w_{n-1})' = c_1 w'_1 + \dots + c_{n-1} w'_{n-1}$ .

## §6. Lineare Gleichungen $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

### (1) Komplexes Fundamentalsystem.

Sei  $p(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \in \mathbb{C}[\lambda]$  ein normiertes Polynom (d.h. Koeffizient bei der höchsten Potenz von  $\lambda$  gleich 1). Dann bilden die Funktionen

$$e^{\lambda_j t}, \quad t e^{\lambda_j t}, \quad \dots, \quad t^{n_j-1} e^{\lambda_j t} \quad (j = 1, \dots, n)$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen für die Gleichung  $p\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0$ .

**Beweisidee.** Lineare Algebra (Zerlegungssatz) liefert

$$\ker p\left(\frac{d}{dt}\right) = \bigoplus_{j=1}^n \ker\left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right)^{n_j}.$$

Bleibt zu zeigen:  $(t^k e^{\lambda t})_{k=1, \dots, m-1}$  ist Fund'system von  $(\frac{d}{dt} - \lambda)^m y = 0$ .  
Wegen  $(\frac{d}{dt} - \lambda)(e^{\lambda t} \varphi(t)) = e^{\lambda t} \frac{d}{dt} \varphi(t)$  ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}) & \xrightarrow{d/dt} & C^\infty(\mathbb{R}) \\ e^{\lambda t} \downarrow & & \downarrow e^{\lambda t} \\ C^\infty(\mathbb{R}) & \xrightarrow{d/dt - \lambda} & C^\infty(\mathbb{R}) \end{array}$$

kommutativ. Um den Beweis zu beenden, genügt es also festzustellen, dass

$$\ker(d/dt)^m \text{ erzeugt wird von } (1, t, \dots, t^{m-1}).$$

□

### (2) Reelles Fundamentalsystem.

Hat das Polynom  $p$  reelle Koeffizienten,  $p(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ , so existiert ein Fundamentalsystem aus reellwertigen Funktionen: Mit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ist dann nämlich auch  $\bar{\lambda}$  eine Nullstelle (gleicher Vielfachheit  $m$ ) von  $p$ . Das System von Fundamentallösungen

$$\left( t^k e^{\lambda t}, t^k e^{\bar{\lambda} t} \right)_{k=0, \dots, m-1}$$

hat gleichen (komplexen) Spann wie das System reeller Fundamentallösungen

$$\left( t^k e^{\operatorname{Re} \lambda t} \cos(\operatorname{Im} \lambda t), t^k e^{\operatorname{Re} \lambda t} \sin(\operatorname{Im} \lambda t) \right)_{k=0, \dots, m-1}.$$